(17/07/2023) Total de hojas entregadas (sin enunciado):

Ej. 1 8	Ej. 2 14	Ej. 3 20	Ej. 4 7	Nota 49

☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.	**Justificar todas las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.

Ejercicio 1 (24 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $A^2 = I$. $A = A^{-1}$

a) (5 puntos) Calcular los posibles autovalores de A. ¿Puede A tener un único autovalor?

b) Suponga además que A es triangular superior. $t_1 = 0$ o $t \neq 0$

i) (5 puntos) Demostrar que si $n = 2$ entonces A es diagonal. iz doble

ii) (6 puntos) Probar que $w = \begin{bmatrix} b \\ 2c \end{bmatrix}$ es autovector de A, siendo $A = \begin{bmatrix} T & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ con $T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $b \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ y $c \in \mathbb{R}$.

c) (8 puntos) Demostrar por inducción que toda A triangular superior tal que $A^2 = I$ es diagonalizable.

Ejercicio 2 (28 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ordenados de mayor a menor según su valor absoluto, y luego según su signo[1], y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sus valores singulares, ordenados de mayor a menor. Para cada uno de los siguientes casos, compare los autovalores y los valores singulares de A y dé una descomposición SVD utilizando, si es necesario, las matrices dadas por la diagonalización:

a) (5 puntos) Si A es ortogonal;

b) (7 puntos) Si A es antidiagonal (o sea que, fuera de la diagonal que va de $(A)_{n1}$ a $(A)_{1n}$, tiene ceros);

c) (8 puntos) Si A es simétrica;

d) (8 puntos) Si A es simétrica e idempotente.

Ejercicio 3 (26 puntos). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 2$ y A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 2 & \alpha \\ -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (13 puntos) Probar que el método de Jacobi converge.

b) (13 puntos) Probar que el método de Gauss-Seidel converge.

Ejercicio 4 (22 puntos). Sea $A = U\Sigma V^T$ una descomposición SVD de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $rg(A) = r$, $b \in \mathbb{R}^m$, $u_1, \ldots, u_m$ las columnas de U y $v_1, \ldots, v_n$ las columnas de V. Demostrar que:

a) (12 puntos) $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=r+1}^{m} (u_i^t b)^2$

b) (12 puntos) La solución de cuadrados mínimos x^* tal que $\|x\|_2$ es mínima es: $x^* = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$

[1] Por ejemplo, si los autovalores son $-2, -1, 1, 2$ entonces $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$